

## KARAKTERISTIK WARRANT DALAM ARGUMENTASI DAN PEMBUKTIAN MATEMATIS

Christina Laamena  
Universitas Pattimura Ambon  
christinmath18@gmail.com

**ABSTRAK.** Penelitian ini bertujuan mengeksplorasi karakteristik warrant dalam argumentasi dan pembuktian matematis. Penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif untuk mengarakteristikan warrant dalam argumentasi mahasiswa ketika mengonstruksi bukti matematis. Selama menyelesaikan masalah, peneliti merekam, mengobservasi dan mencatat semua perilaku termasuk think aloud siswa. Siswa kemudian diwawancarai secara individu untuk menjelaskan proses berpikirnya ketika mengonstruksi bukti. Hasil penelitian menunjukkan bahwa warrant induktif dapat menghasilkan klaim yang benar. Warrant dapat dikelompokkan menjadi warrant yang bersifat lemah dan warrant yang bersifat kuat.

**Kata Kunci:** *Warrant, Argumentasi; Pembuktian Matematis*

### PENDAHULUAN

Bukti adalah pusat ilmu matematika dan menjadi bidang utama penelitian pendidikan matematika (Tikva, 2009). Bukti dan mengonstruksi bukti adalah dasar untuk melakukan, memahami serta mengomunikasikan pengetahuan matematika (Stylianides, 2007), itulah sebabnya pembuktian mendapat peningkatan perhatian di tahun-tahun terakhir (Stylianides, 2007 serta Hanna & de Villiers 2012). Berbagai penelitian tentang proses mengonstruksi bukti telah banyak dilakukan. Hasil-hasil penelitian ini menunjukkan bahwa dalam mengonstruksi bukti matematis seseorang tidak selamanya mengikuti aturan deduktif, namun seringkali terdapat banyak aspek induktif seperti bukti empiris, kasus-kasus khusus atau grafik (Tymoczko, 1985; Feferman, 2000; and Arzarello, 2007, English et al 2007, Burton 2004) yang digunakan untuk memahami proposisi yang akan dibuktikan serta untuk menemukan hubungan antar proposisi (Arzarello, Paola dan Sabena, 2009). Argumentasi akan terjadi selama proses mengonstruksi bukti untuk mengorganisir beberapa justifikasi (argumen) yang telah dihasilkan (Boero, Garuti dan Mariotti, 1999) dan menghasilkan konklusi yang valid.

#### **Argumentasi dan Pembuktian**

Argumentasi dan pembuktian merupakan salah satu bagian penting dalam pembelajaran matematika. *Principles and Standards for School Mathematics (National Council of Teachers of Mathematics, 2000)* menegaskan bahwa salah satu bagian dalam memahami matematika adalah mengembangkan argumen dan bukti matematika kemudian mengevaluasinya. Argumentasi berperan penting dalam pembuktian matematika (Douek, 2009), walaupun terdapat perbedaan antara pembuktian dan argumentasi biasa (*ordinary argumentation*) (Duval, 2007). Argumentasi juga penting dalam menghasilkan konjektur serta mengonstruksi buktinya.

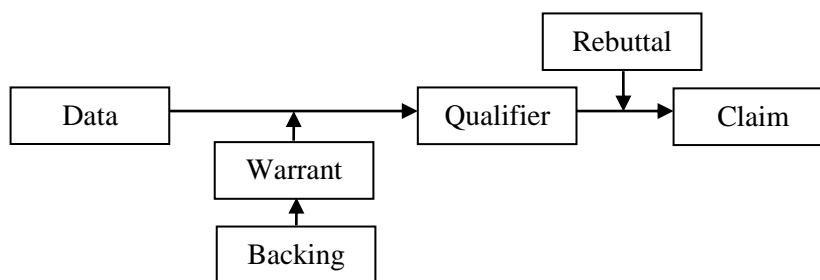
Argumentasi matematika selalu dihubungkan dengan pembuktian, untuk menunjukkan kebenaran kesimpulan yang dibuat (Aberdein, 2008). Pablo, Ramos dan Inglis (2009) mengemukakan tiga aktivitas yang saling berhubungan dalam mengonstruksi bukti dan argumentasi yaitu (1) membaca argumen yang diberikan: memahami dan mengevaluasi argumen berdasarkan kriteria yang diberikan (2) mengonstruksi argumen baru: mengeksplorasi masalah, membuat konjektur dan mengestimasi kebenarannya serta menjustifikasi pernyataan agar menjadi benar, dan (3) mempresentasikan argumen yang diperoleh: meyakinkan pendengar atau pembaca tentang kesimpulannya, menjelaskan mengapa kesimpulan tersebut benar serta mendemonstrasikan validitas argumen

Bell (dalam De Villers, 1990) menjelaskan lima tujuan utama pembuktian dan argumentasi, yaitu (1) memverifikasi: menentukan kebenaran pernyataan, (2) menjelaskan: memberikan pengertian mengapa pernyataan benar, (3) sistematisasi: menyusun hasil dalam system deduktif,

(4) penemuan: menemukan hasil baru dan (5) komunikasi: menyebarkan pengetahuan matematika. Pedemonte (2007) menjelaskan tiga fungsi karakteristik umum dalam argumentasi dan pembuktian matematis, yaitu: (1) sebagai justifikasi rasional, (2) berfungsi untuk meyakinkan, (3) ditujukan untuk banyak pendengar (*universal audience*), yaitu komunitas matematik, kelas, guru dan teman diskusinya.

### Argumentasi Toulmin

Toulmin (1958) mengemukakan suatu pendekatan untuk menganalisis argumentasi berawal dari logika formal. Dia kurang tertarik dengan validitas argumen logis dan lebih khawatir tentang konten dan struktur semantic. Inilah cara menganalisis argumentasi yang dikenal sebagai “informal logic” dengan tujuan untuk menekankan perbedaannya dari logika formal. Skema Toulmin terdiri dari 6 komponen, yaitu yaitu Claim/Conclusion (C), Data (D), Warrant (W), Backing (B), Modal Qualifier (Q) dan Rebuttal (R). Keenam komponen ini terhubung bersama dalam struktur seperti pada Gambar 1.



**Gambar 1.** Skema Argumentasi Toulmin

Claim (C) yakni pernyataan atau kesimpulan yang dibuat berdasarkan data, *Data* (D) adalah ‘fondasi’ argumen didasarkan, fakta-fakta yang relevan dengan klaim. *Warrant* (W) seperti ‘jembatan’ yang menghubungkan data dan klaim dan menjadi dasar pikir atau alasan yang digunakan untuk menghasilkan kesimpulan. *Warrant* dapat berbentuk: rumus, definisi, aksioma atau teorema maupun membuat analogi, gambar atau diagram dan grafik. *Warrant* diperkuat oleh *backing* (B) yang merupakan bukti-bukti lanjut atau alasan tambahan yang dibutuhkan. *Rebuttal* (R) adalah pernyataan yang membantah kesimpulan yang dihasilkan jika kondisi tidak dipenuhi.

Inglis, Mejia-Ramos dan Simpson (2007) mengemukakan bahwa dalam memvalidasi sebuah pernyataan matematik, seseorang dapat menggunakan tiga jenis warrant yakni: warrant induktif yaitu warrant yang didasarkan pada interpretasi konsep matematika secara konkrit berupa representase visual seperti gambar, grafik atau representase ilustratif lainnya termasuk contoh-contoh; warrant struktural intuitif yaitu penggunaan pengamatan, percobaan, atau beberapa jenis struktur mental, baik itu visual atau lainnya yang meyakinkan mereka tentang kesimpulan; serta warrant deduktif yaitu penggunaan sifat, aturan dan teorema dalam proses deduktif. Hasil penelitian Ubuz, Dincer dan Bulbul (2013) menunjukkan bahwa ketika mengonstruksi definisi (pada argumentasi kolektif) siswa menggunakan warrant deduktif dan warrant referensi.

Argumentasi Toulmin telah digunakan oleh banyak peneliti pendidikan matematika. Krummhaeur (1995) dan Pedemonte (2002&2007) mereduksi *backing*, *rebuttal* dan *modal qualifier*. Knipping (2003, 2007 & 2008); Ubuz, Dincer dan Bubul (2012 & 2013) serta Chen dan Wang (2016) mereduksi *rebuttal* dan *modal qualifier*. Penelitian ini akan berfokus pada warrant untuk menghasilkan kesimpulan valid.

Berdasarkan penjelasan di atas, makalah ini bertujuan mengeksplorasi skema untuk menjelaskan struktur argumentasi mahasiswa selama mengonstruksi bukti, mendemonstrasikan salah satu bagian dari skema yaitu warrant dan mengarakteristiknya berdasarkan hubungannya dengan komponen-komponen lainnya. Penelitian ini penting karena kebenaran suatu klaim bergantung pada warrant.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif untuk mengarakteristikan warrant dalam argumentasi mahasiswa ketika mengonstruksi bukti matematis. Masalah diberikan kepada 52 mahasiswa matematika dan pendidikan matematika Universitas Pattimura Ambon untuk diselesaikan secara individu. Selama menyelesaikan masalah, peneliti merekam, mengobservasi dan mencatat semua perilaku termasuk think aloud siswa. Siswa kemudian diwawancarai secara individu untuk menjelaskan proses berpikirnya ketika mengonstruksi bukti.

Peneliti memberikan dua buah masalah aljabar yakni pernyataan matematika yang bernilai salah (*disproved*) sehingga mahasiswa diharapkan dapat menentukan *counter example* yang dalam model Toulmin disebut *rebuttal*.

Diberikan fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dengan rumus  $f(x) = x^2$  dan  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dengan rumus  $g(x) = x$ .

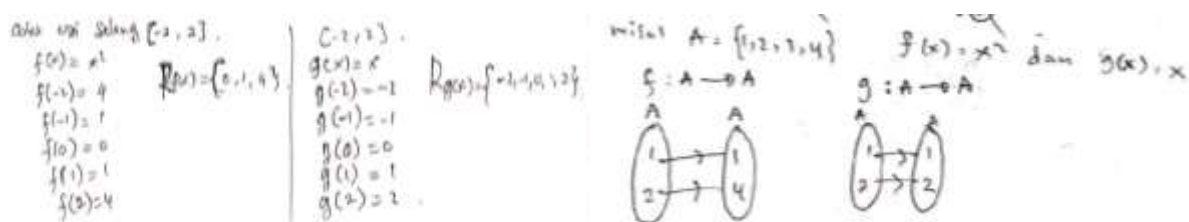
Selidiki apakah  $f(x) \geq g(x)$  untuk semua  $x$  bilangan Real?

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Peneliti akan mengarakteristikan warrant berdasarkan jenisnya yaitu: warrant deduktif, induktif dan structural intuitif (English, 2007). Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketiga warrant ini ada yang bersifat lemah dan ada yang bersifat kuat. Istilah warrant lemah digunakan untuk alasan yang tidak sempurna, atau kurang tepat ketika seseorang membuat kesimpulan berdasarkan data. Berikut ini, peneliti akan mendeskripsikan karakteristik warrant disertai contoh-contohnya

### Warrant yang bersifat lemah

Siswa menggunakan berbagai jenis warrant untuk menyelidiki kebenaran pernyataan yang diberikan. Warrant induktif yang digunakan siswa terdiri dari: contoh-contoh bilangan real, grafik fungsi  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = x$  serta diagram panah. Di antara ketiga warrant induktif ini, yang bersifat lemah adalah contoh-contoh bilangan dan diagram panah. Contoh warrant induktif disajikan pada Gambar 1 (1a,1b). Pada Gambar 2 terlihat jelas bahwa siswa mengambil beberapa contoh bilangan real dan membuat diagram panah dan menyimpulkan bahwa pernyataan bernilai benar. Warrant induktif ini bersifat lemah, karena tidak semua bilangan real dicantumkan pada contoh yang dipilih sehingga menghasilkan claim yang salah.



**Gambar 2.** Warrant induktif yang bersifat lemah. 2a. Contoh Bilangan Real 2b. Diagram Panah

Siswa juga menggunakan warrant structural intuitif dengan mengatakan bahwa “kuadrat suatu bilangan selalu lebih besar atau sama dengan dirinya sendiri”. Penggunaan kata ‘suatu bilangan’ merujuk pada bilangan real namun pernyataan ini bersifat lemah. Siswa memperhatikan fakta-fakta masalah tentang bilangan real, namun dengan cepat mengatakan sifat bilangan yang bukan bilangan real, tetapi bilangan bulat. Warrant structural intuitif ini menghasilkan klaim yang salah juga.

Warrant deduktif digunakan siswa dengan mengelompokkan bilangan real menjadi beberapa bagian, seperti pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Pengelompokan Bilangan Real oleh Siswa

Kategori Bilangan Real	Kelompok 1	Kelompok 2	Kelompok 3
Kategori pertama (a)	$x = \frac{a}{b}, a < b$ (1a)	$x < 0$ (2a)	$x \in \mathbb{Z}^+$ (3a)
Kategori Kedua (b)	$x = \frac{a}{b}, a > b$ (1b)	$x > 0$ (2b)	$x \in \mathbb{Z}^-$ (3b)
Kategori Ketiga (c)	$x = \frac{a}{b}, a = 0$ dan $b \neq 0$ (1c)	$x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{R}$ (2c)	$x = \frac{1}{a}, x \in \mathbb{R}$ (3c)

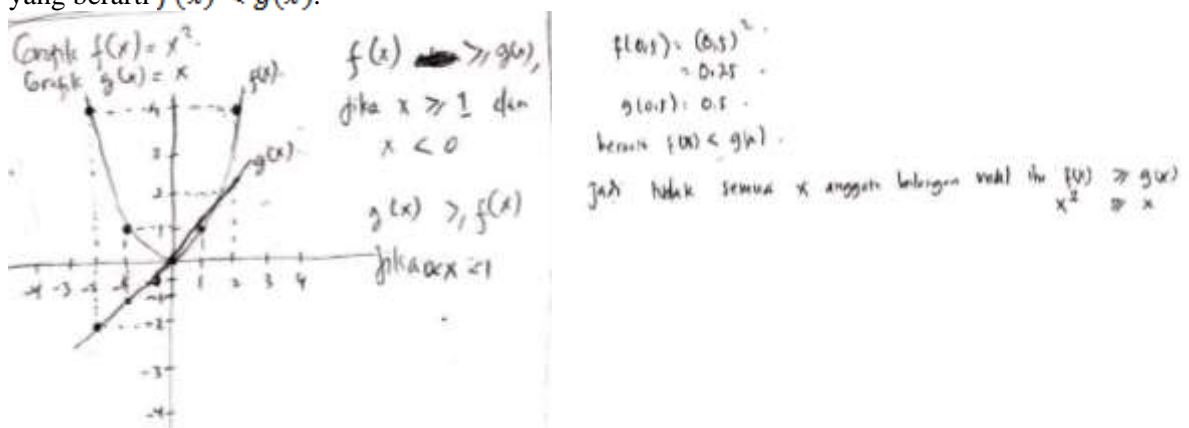
Warrant deduktif lemah terjadi pada: kelompok 1 dan 2 karena tidak terdapat kelompok  $x = \frac{a}{b}$  dengan  $a = b$ , pada kelompok 2b tidak terdapat untuk  $x = 0$ , pada kelompok 3a tidak terdapat  $x = 1$ . Hal ini menghasilkan beberapa klaim benar dengan alasan yang lemah. Namun, karena pernyataan yang diberikan bernilai salah, maka ketika siswa menemukan sebuah contoh penyangkal (counter example) maka cukup untuk menyimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan bernilai salah. Gambar 2, memberikan salah satu contoh jawaban siswa

Diberikan suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 diketahui bahwa  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = x$ .  
 jika  $\forall x \in \mathbb{R} \{x | x \in \mathbb{R}^+\}$  Adis bahwa  $f(x) \geq g(x)$ .  
 maka ~~terbukti~~  $f(x) \geq g(x)$  Amhl sebany  $x \in \mathbb{R}$   
 jika  $\{x | x \in \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}\}$  maka terbukti  $f(x) \geq g(x)$   
 jika  $\{x | x \in \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}\}$  maka ~~terbukti~~  $f(x) \geq g(x)$

**Gambar 3.** Contoh Warrant deduktif yang bersifat lemah

**Warrant yang bersifat Kuat**

Warrant yang bersifat kuat dapat berasal dari warrant induktif maupun warrant deduktif. Warrant induktif yang kuat terdiri dari: contoh-contoh bilangan real dan grafik fungsi  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = x$ . Contoh warrant induktif kuat disajikan pada Gambar 4 (4a,4b). Pada Gambar 4 terlihat jelas bahwa siswa mengambil beberapa contoh bilangan real yang mewakili semua himpunan bagian dari bilangan real dan menemukan  $x = \frac{1}{2}$  yang tidak memenuhi ketaksamaan yang diberikan. Pada tahap ini, siswa menemukan contoh penyangkal dan menyimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan bernilai salah. Grafik fungsi kuadrat dan linier juga digunakan sebagai warrant induktif dengan menggambar grafik fungsi  $f(x) = x^2$  dan  $g(x) = x$ . Berdasarkan grafik, siswa menemukan bahwa pernyataan bernilai salah karena untuk  $0 < x < 1$  berlaku  $x^2 < x$  yang berarti  $f(x) < g(x)$ .



**Gambar 4.** Warrant Induktif yang kuat

Warrant yang kuat juga berasal dari warrant deduktif. Setelah mengelompokan bilangan real, siswa menggunakan definisi-definisi yang tepat diperoleh claim bahwa pernyataan bernilai salah

## **KESIMPULAN**

Warrant deduktif sebagai bentuk pembuktian matematika tidak menjamin bahwa akan menghasilkan claim yang benar. Untuk pernyataan yang bernilai salah, seseorang cukup menunjukkan sebuah contoh penyangkal maka akan dihasilkan pernyataan yang bernilai benar. Counterexample, dapat ditemukan dengan berbagai cara termasuk warrant induktif. Pada penelitian ini, terbukti bahwa penggunaan grafik, contoh dan warrant induktif lainnya dapat menolong menghasilkan counter example dan menghasilkan claim yang benar.

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Aberdein, A. 2008. *Mathematics and Argumentation*. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
- Alcock, L. 2009. *Teaching Proof to Undergraduates: Semantic and Syntactic Approaches*. Proceeding ICMI Study 19, 2009.
- Arzarello, F., Paola D., Sabena, C. 2009. *Proving In Early Calculus*. Proceeding ICMI 2009
- Arzarello, F., Paola D., Sabena, C. 2009. *Logical And Semiotic Levels In Argumentation*. Proceeding ICMI 2009
- Boero, P., Garuti, R., Mariotti M. A. 1999. *Some Dynamic Mental Processes Underlying Producing and Proving Conjectures» Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX, vol. 2, (pp. 121 – 128), Valencia.*
- Bromley, D.B. 1986. *The case-study method in psychology and related disciplines*. Chichester. John Wiley & Sons
- Burton, L. 2004. *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics*. Dordrecht, Kluwer
- Chen, Y.T., dan Wang, J. H. 2016. *Analyzing with Posner's Conceptual Change Model and Toulmin's Model of Argumentative Demonstration in Senior High School Students' Mathematic Learning*. *International Journal of Information and Education Technology*, Vol. 6, No. 6, June 2016
- de Villiers, M. 1990. *The Role and Function of Proof in Mathematics*. *Pythagoras* 24: 17-24
- Douek, N. 1999. *Some Remark About Argumentation and Mathematical Proof and Their Educational Implication*. *European Research in Mathematics Education I: Group 1*
- Duval. 2007. *Struktur Argumentasi*. *Educational Studies in Mathematic*, 22, 233-261
- Ginsburg, H. 1981. *The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques*. *For the Learning of Mathematics* 1 (1), 4-11

- Hanna, G., & de Villiers, M. 2012. *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*. Dordrecht, Netherlands: Springer.
- Harel, G. 2008. DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*, 40:487–500. DOI 10.1007/s11858-008-0104-1
- Hitchcock D., and Verheij, B. 2006. *Arguing on the Toulmin Model: New Essays in Argument analysis and Evaluation* (p.1-23), Springer.
- Hoffkamp, A., Schnieder, J. and Paravicini, W. 2011. *Mathematical Enculturation – Argumentation And Proof At The Transition From School To University*
- Inglis, M., Ramos M. and Simpson, 2007. *Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification*. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.
- Knipping, Ch. 2002. *Proof and proving processes: Teaching Geometry in France and Germany*. In H.-G. Weigand (Ed.), *Developments in Mathematics Education in German-Speaking Countries. Selected Papers From the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern 1999* (pp. 44–54). Hildesheim: Franzbecker Verlag.
- Knipping, Ch. 2003. *Argumentation Structures in Classroom Proving Situations*. *European Research in Mathematics Education III*
- Krummheuer, G. 1995. *The Ethnography of Argumentation*. In: P. Cobb und H. Bauersfeld (Ed.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, 229-269
- National Council of Teacher of Mathematics. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*
- Pablo, J., Ramos, M., and Inglis, M. 2008. *What are the argumentative activities associated with proof?* Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 28(2) June 2008
- Pedemonte, B. 2002. *Relation Between Argumentation and Proof in Mathematics: Cognitive Unity or Break?* In: *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2, Marienbad, 2001.
- Pedemonte, B. 2003. *What Kind of Proof can be Constructed Following an Abductive Argumentation?* *European Research in Mathematics Education III*
- Pedemonte, B. 2007. *How can the relationship between argumentation and proof be analysed.* *Educ Stud Math* 2007 66:23–41
- Rav, Y. 1999. *Why do We Prove Theorems?* *Philosophia Mathematica*, 7(3), 5-41
- Selden, A. & Selden, J. 2013. *Persistence and Self-Efficacy in Proving*. Martinez, M. & Castro Superfine, A (Eds.). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 304-307
- Stylianides, A. J. 2007. *Proof and Proving in School Mathematics*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321
- Tetens, H. 2010. *Argumentieren lehren. Eine kleine Fallstudie*. In Meyer, K. (Ed.), *Texte zur Didaktik der Philosophie* (198-214). Stuttgart: Reclam.

- Tikva, J.B. 2009. Old Meta-Discursive Rules Die Hard. *Proceeding ICMI Study 19*, 2009
- Toulmin, S.E. 1958. *The Uses of Argument*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Toulmin, S. E. 2003. *The Uses of Argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Ubuz, B., Dincer, S., and Bulbul, A. 2012. Argumentation in undergraduate math courses: A study on proof generation. Tso, T. Y. (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4, 163-170.
- Ubuz B., Dincer S.,and Bülbül A. 2013. Argumentation in Undergraduate Math Courses: A Study on Definition Construction. *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 313-320. Kiel, Germany: PME.
- Viholainen, A. 2009. *The View Of Mathematics And Argumentation*
- Vincent, J., Chick, H., dan McCrae, B. 2005. Argumentation Profile Charts As Tools For Analysing Students' Argumentations. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 281-288. Melbourne: PME